ΜΕΤΑΤΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΕΥΘΕΑ ΓΙΝΟΜΕΝΑ

1) Να εξετάσετε αν οι ομάδες:

i. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2_{\oplus}}$ και ii. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{3_{\oplus}}$ είναι κυκλικές

Έπειτα, να βρεθούν όλες οι υποομάδες τους

ΛΥΣΗ

i. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1}),(\bar{1},\bar{0}),(\bar{1},\bar{1})\}$

$|\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2| = 4$

$\oplus$	$(\bar0,\bar0)$	$(\bar0,\bar1)$	$(\bar1,\bar0)$	$(\bar1,\bar1)$
$(\bar0,\bar0)$	$(\bar0,\bar0)$	$(\bar0,\bar1)$	$(\bar1,\bar0)$	$(\bar1,\bar1)$
$(\bar0,\bar1)$	$(\bar0,\bar1)$	$(\bar0,\bar0)$	$(\bar1,\bar1)$	$(\bar1,0)$
$(\bar1,\bar0)$	$(\bar1,0)$	$(\bar1,\bar1)$	$(\bar0,\bar0)$	$(0,\bar1)$
$(\bar1,\bar1)$	$(\bar1,\bar1)$	$(\bar1,\bar0)$	$(\bar0,\bar1)$	$(\bar0,\bar0)$

Παρατηρούμε ότι όλα τα στοιχεία του $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ έχουν τάξη ίση με 2 (εκτός του τετριμμένου). Άρα, δεν είναι κυκλική ομάδα

ii. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 = \{(\bar0,\bar0),(\bar0,\bar1),(\bar0,\bar2),(\bar1,\bar0),(\bar1,\bar1),(\bar1,\bar2)\}$

$|\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3| = 6$

$\oplus$	$(\bar0,\bar0)$	$(\bar0,\bar1)$	$(\bar0,\bar2)$	$(\bar1,\bar0)$	$(\bar1,\bar1)$	$(\bar1,\bar2)$
$(\bar0,\bar0)$	$(\bar0,\bar0)$	$(\bar0,\bar1)$	$(\bar0,\bar2)$	$(\bar1,\bar0)$	$(\bar1,\bar1)$	$(\bar1,\bar2)$
$(\bar0,\bar1)$	$(\bar0,\bar1)$	$(\bar0,\bar2)$	$(\bar0,\bar0)$	$(\bar1,\bar1)$	$(\bar1,\bar2)$	$(\bar1,\bar0)$
$(\bar0,\bar2)$	$(\bar0,\bar2)$	$(\bar0,\bar0)$	$(\bar0,\bar1)$	$(\bar1,\bar2)$	$(\bar1,\bar0)$	$(\bar1,\bar1)$
$(\bar1,\bar0)$	$(\bar1,\bar0)$	$(\bar1,\bar1)$	$(\bar1,\bar2)$	$(\bar0,\bar0)$	$(\bar0,\bar1)$	$(\bar0,\bar2)$
$(\bar1,\bar1)$	$(\bar1,\bar1)$	$(\bar1,\bar2)$	$(\bar1,\bar0)$	$(\bar0,\bar1)$	$(\bar0,\bar2)$	$(\bar0,\bar0)$
$(\bar1,\bar2)$	$(\bar1,\bar2)$	$(\bar1,\bar0)$	$(\bar1,\bar1)$	$(0,\bar2)$	$(\bar0,\bar0)$	$(\bar0,\bar1)$

Παρατηρούμε ότι το στοιχείο $(\bar1,\bar1)$ αποτελεί γεννήτορα της ομάδας $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$. Άρα, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ είναι κυκλική με $o(\bar1,\bar1) = 6 = |\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3|$.

όσο για τις υποομάδες:

• $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$:

Τετριμμένη: $<(\bar{0},\bar{0})>$ ← ελαχ.

Άλλες: $<(\bar{0},\bar{1})>, <(\bar{1},\bar{0})>, <(\bar{1},\bar{1})>, \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ ← μεγ

• $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$ (κυκλική τάξης 6)

άρα οι διαιρέτες του 6 είναι οι διακεκριμένες υποομάδες της $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$ όπως το $(\bar{1},\bar{1})$ γεννήτορας 1, 2, 3, 6. Είναι οι εξής:

$<1\cdot(\bar{1},\bar{1})>, <2(\bar{1},\bar{1})>, <3(\bar{1},\bar{1})>, <6(\bar{1},\bar{1})> \Rightarrow$

$\Rightarrow <(\bar{1},\bar{1})>, <(\bar{0},\bar{2})>, <(\bar{1},\bar{0})>, <(\bar{0},\bar{0})>$

Σαφώς μπορούμε άμεσα να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα μέγιστου κοινού διαιρέτη για να εξετάσουμε αν οι παραπάνω ομάδες είναι κυκλικές ή όχι. Δηλαδή η $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ έχει τάξη 4 με $\mathbb{Z}_2$ κυκλική αλλά $(2,2)=2\neq 1$ άρα όχι κυκλική ενώ η $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$ έχει τάξη 6 με $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$ κυκλικές και $(2,3)=1$ άρα κυκλική. Τέλος, την τάξη του $(\bar{1},\bar{1})$ μπορούμε να τη βρούμε όχι μόνο από τον πίνακα πράξης αλλά και από τη χρήση του Θεωρήματος ελάχιστου κοινού πολλαπλάσιου ότι:

$o(\bar{1},\bar{1}) = ΕΚΠ(o(\bar{1}), o(\bar{1})) = ΕΚΠ(2,3) = 6$.

2) Εάν $A \leq G$ και $B \leq G'$ τότε νδο το $A\times B \subseteq O\times K$ είναι υποομάδα της $O\times K$.

ΛΥΣΗ

1. $A\times B \neq \emptyset$ (διότι $A\neq\emptyset \wedge B\neq\emptyset \Rightarrow (\exists \alpha,\beta): \alpha\in A \ \& \ \beta\in B \Rightarrow$
$\Rightarrow (\alpha,\beta)\in A\times B \Rightarrow A\times B\neq\emptyset$)

2. Έστωσαν $(a,b), (a',b')$ εν $A\times B$ τότε

όπως $A,B \leq G,G' \Rightarrow aa' \in A$ & $bb' \in B \Rightarrow (aa',bb') \in A\times B$

$\Rightarrow (a,b)\cdot(a',b') \in A\times B \Rightarrow$ κλειστή πράξη

3. Έστω $(a,b) \in A\times B$ τότε

όπως $A,B \leq G,G' \Rightarrow a^{-1} \in A$ & $b^{-1} \in B \Rightarrow (a^{-1},b^{-1}) \in A\times B \Rightarrow$

$\Rightarrow (a,b)^{-1} \in A\times B$

Συνεπώς, $A\times B \leq G\times G'$

3) Έστωσαν οι μετατάξεις/μεταθέσεις

$\sigma=(1,4)$, $\tau=(1,4,3,5,6)$ και $\rho=(2,3,6,4)$

Να βρεθούν οι τάξεις των στοιχείων

i. $\sigma\tau\rho\tau\sigma$, ii. $\sigma\tau\rho^3$ και iii. $\rho^{-1}\cdot\tau^{20}$

ΛΥΣΗ

i.

$$\begin{array}{cccccc|l}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \\
4 & 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & \sigma \\
3 & 2 & 5 & 4 & 6 & 1 & \tau \\
6 & 3 & 5 & 2 & 4 & 1 & \rho \\
1 & 5 & 6 & 2 & 3 & 4 & \tau \\
4 & 5 & 6 & 2 & 3 & 1 & \sigma
\end{array}$$

Άρα, $\sigma\tau\rho\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overbrace{\sigma\tau\rho\tau\sigma}^{\circledast} = (1,4,2,5,3,6)$

$$\begin{array}{l|cccccc}
\circledast & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
\circledast & 4 & 5 & 6 & 2 & 3 & 1 \\
\circledast & 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 \\
\circledast & 5 & 6 & 4 & 3 & 1 & 2 \\
\circledast & 3 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 \\
\circledast & 6 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6
\end{array} \leftarrow \text{ταυτοτική}$$

Άρα, $o(\sigma\tau\rho\tau\sigma)=6$

Δηλ. κάθε κύκλος μήκους 6 έχει τάξη 6.

ii. $\rho^3 = (\rho\circ\rho)\circ\rho = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&4&2&6&5&3\end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ccccccc} & 1&2&3&4&5&6\\ \rho^3\downarrow & 1&4&2&6&5&3\\ \tau\downarrow & 4&3&2&1&6&5\\ \sigma\downarrow & 1&3&2&4&6&5\end{array}$$

Άρα, $\underbrace{\sigma\tau\rho^3}_{\circledast} = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&3&2&4&6&5\end{pmatrix} =$

$= (2,3)(5,6).$

Έτσι,

$$\begin{array}{ccccccc} & 1&2&3&4&5&6\\ \circledast\downarrow & 1&3&2&4&6&5\\ \circledast\downarrow & 1&2&3&4&5&6\end{array} \leftarrow \text{ταυτοτική}$$

Άρα, $o(\sigma\tau\rho^3) = 2 =$ ΕΚΠ$\{o(2,3), o(5,6)\}=$ΕΚΠ$\{2,2\}=2$.

iii. $\rho = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&3&6&2&5&4\end{pmatrix} \Rightarrow \rho^{-1} = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&4&2&6&5&3\end{pmatrix}$

Επίσης, παρατηρούμε ότι $\tau^5 = Id$ (ταυτοτική)

Άρα, $\tau^{10} = \tau^{15} = \tau^{20} = Id = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&3&4&5&6\end{pmatrix}$

Έτσι, $\underbrace{\rho^{-1}\circ\tau^{20}}_{\circledast} = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&3&4&5&6\\1&4&2&6&5&3\end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ccccccc} & 1&2&3&4&5&6\\ \circledast\downarrow & 1&4&2&6&5&3\\ \circledast\downarrow & 1&6&4&3&5&2\\ \circledast\downarrow & 1&3&6&2&5&4\\ \circledast\downarrow & 1&2&3&4&5&6\end{array}$$

Άρα, $o(\rho^{-1}\tau^{20}) = 4$

Κύκλος μηκους 4 εχει ταξη 4

4) Έστω $H, K \leq G$, G αβελιανή ομάδα τότε το σύνολο

$H \cdot K = \{h \cdot k \in G / h \in H,\ k \in K\} \subseteq G$ είναι υποομάδα της G

Έπειτα, νδο αν G όχι αβελιανή τότε $H \cdot K \nleq G$

<u>ΛΥΣΗ</u>

1) $H, K \leq G \Rightarrow H, K \neq \emptyset \Rightarrow (\exists h, k) : h \in H$ και $k \in K \Rightarrow$

$\Rightarrow h \cdot k \in H \cdot K \Rightarrow H \cdot K \neq \emptyset$

2) Έστω a, b εν $H \cdot K \Rightarrow a = h_1 k_1$ & $b = h_2 k_2$

όμως $H, K \leq G \Rightarrow \begin{cases} (\forall h_1, h_2 \text{ εν } H) : h_1 h_2 \in H \text{ και} \\ (\forall k_1, k_2 \text{ εν } K) : k_1 k_2 \in K \end{cases}$

Τότε, $a \cdot b = h_1 k_1 h_2 k_2 \overset{\text{αβελ.}}{=\!=} \underbrace{h_1 h_2}_{\in H} \underbrace{k_1 k_2}_{\in K} \in H \cdot K$

3) Έστω $a \in HK \Rightarrow a = h \cdot k$, $h \in H$ & $k \in K$

όμως $H, K \leq G \Rightarrow (\forall k, h \text{ εν } H \cdot K) : k^{-1} \in K$ και $h^{-1} \in H$

$\alpha^{-1} = (hk)^{-1} \overset{\text{αβελ.}}{=\!=} \underbrace{h^{-1}}_{\in H} \cdot \underbrace{k^{-1}}_{\in K} \in H \cdot K$. Άρα, $H \cdot K \leq G$

Εάν G όχι αβελιανή $\Longrightarrow H \cdot K \nleq G$

Αντιπαράδειγμα:

Έστω οι κύκλοι: (Η Σ_3 όχι αβελιανή)

$\mu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ και $\mu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ όχι ξένοι

Έστω επίσης και οι υποομάδες $H = \langle \mu_1 \rangle = \{Id, \mu_1\}$

και $K = \langle \mu_2 \rangle = \{Id, \mu_2\}$ τότε έχουμε ότι:

$H \cdot K = \{Id, \mu_1, \mu_2, \mu_1 \mu_2\}$ όπου:

$\mu_1 \mu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} := \mu_3$ όπου $\mu_3 \mu_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \notin HK \Rightarrow HK \nleq G$

5) Να εξετάσετε εάν η μετάθεση

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 6 & 7 & 5 & 9 & 8 & 4 & 11 & 3 & 1 & 12 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

είναι άρτια.

Έπειτα, να βρεθεί μετάθεση β ώστε η βa να έχει τάξη 5.

ΛΥΣΗ

$$a = (1,6,4,9)\cdot(2,7,11)\cdot(3,5,8)(10,12) =$$

$$= \underbrace{(1,9)(1,4)(1,6)(2,11)(2,7),(3,8)(3,5)(10,12)}_{8 \text{ μεταθέσεις}}$$

Άρα, a άρτια μετάθεση

Η β όχι μοναδική. Μπορεί επίσης:

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 8 & 9 & 12 & 6 & 3 & 1 & 2 & 5 & 4 & 10 & 7 & 11 \end{pmatrix}$$

$$o(\beta a) = 5 \Rightarrow (\beta a)^5 = Id$$

Είναι $$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 12 & 9 & 10 & 6 & 3 & 1 & 2 & 5 & 4 & 8 & 7 & 11 \end{pmatrix}$$

διότι:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
6	7	5	9	8	4	11	3	1	12	2	10	a
1	2	3	4	5	6	7	10	12	11	9	8	β (βa)
1	2	3	4	5	6	7	11	8	9	12	10	βa
1	2	3	4	5	6	7	9	10	12	8	11	βa
1	2	3	4	5	6	7	12	11	8	10	9	βa
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	βa

↳ τα διατηρούμε ταυτοτικά με την αρχική κατάσταση

↳ "Περάσαμε" εις 5 θέσεις από το 8 εως το 12 όλες τους δίχως να μείνει καμία ταυτοτική

6) Θεωρούμε τις μεταθέσεις της συμμετρικής ομάδας Σ_8

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{και}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 6 & 8 & 7 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

i. Να γραφούν οι μεταθέσεις τ & σ ως γινόμενα ξένων κύκλων

ii. Να προσδιοριστούν οι τάξεις τους

iii. Να υπολογιστεί η μετάθεση σ^{2013}

iv. Να εξεταστεί εάν υπάρχει μετάθεση $\rho \in \Sigma_8$ ώστε:

$\rho\tau\rho^{-1} = \sigma$. Αν ναι τότε βρείτε μια τέτοια.

ΛΥΣΗ

i. $\tau = (1,2)(3,4,5)(6,7,8)$ & $\sigma = (1,3,6)(2,4,8)(5,7)$

ii. Άλλος τρόπος εύρεσης της τάξης για μεγάλου μήκους μεταθέσεις είναι:

Εάν δύο ή περισσότεροι κύκλοι είναι ξένοι μεταξύ τους (που συμβαίνει):

Τότε $o(\tau) = [o(1,2), o(3,4,5), o(6,7,8)] = [2,3,3] = 6$

και

$$o(\sigma) = [o(1,3,6), o(2,4,8), o(5,7)] = [3,3,2] = 6$$

iii. $2013 = 6 \cdot 335 + 3$ τότε

$$\sigma^{2013} = \sigma^{6 \cdot 335} \cdot \sigma^3 = (\sigma^6)^{335} \cdot \sigma^3 = (Id)^{335} \cdot \sigma^3 = \sigma^3$$

όπου $\sigma^3 = [(1,3,6)(2,4,8)(5,7)]^3$ $\underset{\text{αντιμετατίθενται}}{\underline{\underline{\text{ξένοι}}}}$

$$= \cancel{(1,3,6)}^{3 \to Id} \circ \cancel{(2,4,8)}^{3 \to Id} \circ (5,7)^3 = (5,7)^3 = \underbrace{\cancel{(5,7)^2}}_{Id} \circ (5,7) = (5,7)$$

iv. Είναι, $\tau=(1,2)(3,4,5)(6,7,8)$

και $\sigma=(5,7)(1,3,6)(2,4,8)$ $\Big\}$ έχουν την ίδια

ανάλυση σε ξένους κύκλους οι μεταθέσεις σ & τ

(1 κύκλος μήκους 2 και 2 κύκλοι μήκους 3)

Άρα, $\exists\, \rho \in \Sigma_8 : \rho\tau\rho^{-1}=\sigma$

Θεωρούμε $\rho=(1,7,4,3)(2,5,6)$ και παρατηρούμε ότι επαληθεύει τη σχέση $\rho\tau\rho^{-1}=\sigma$.